

CONTROLLI AUTOMATICI

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

Banda passante e sviluppo in serie di Fourier

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

Sviluppo in serie di Fourier

- Qualunque funzione periodica di periodo T

$$f(t) = f(t + T) \quad \forall t$$

può essere rappresentata mediante **sviluppo in serie di Fourier**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(\omega_0 n t + \varphi_n)}_{\text{armoniche}} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

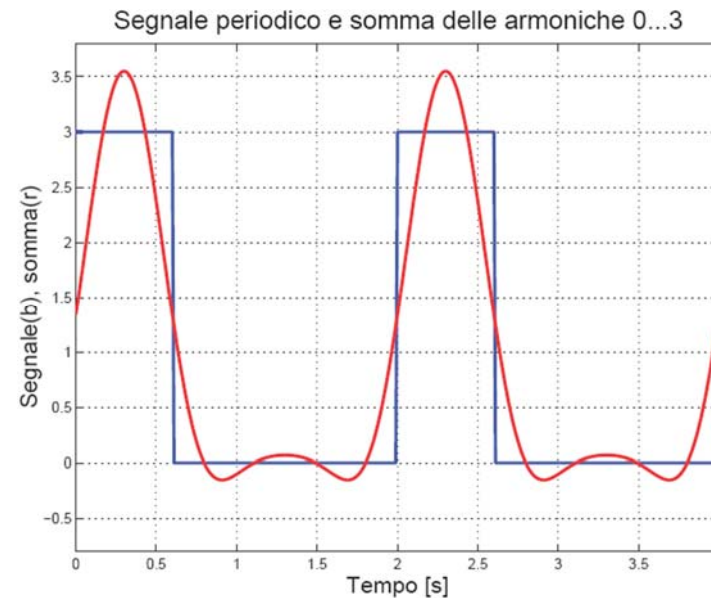
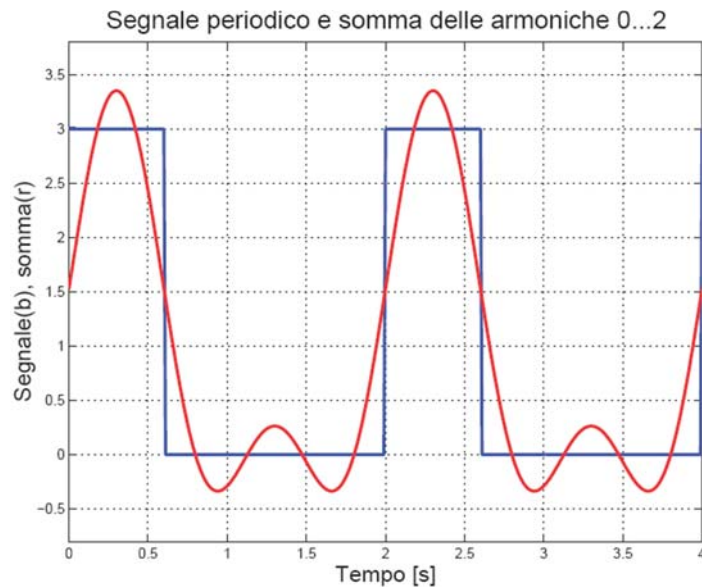
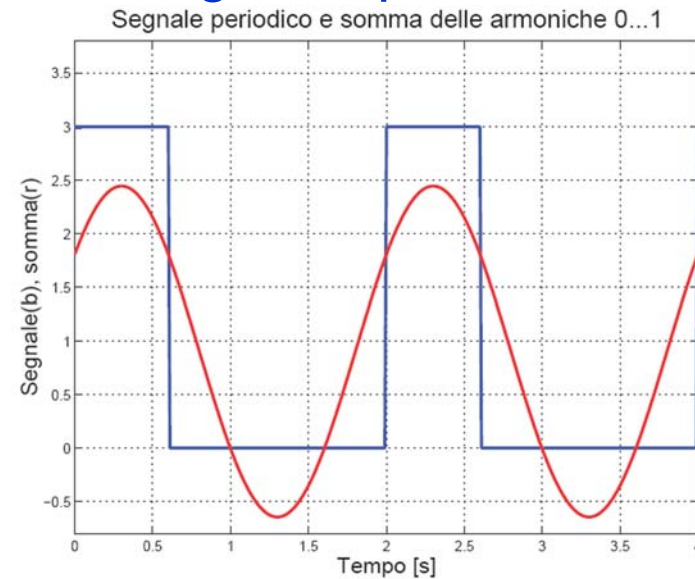
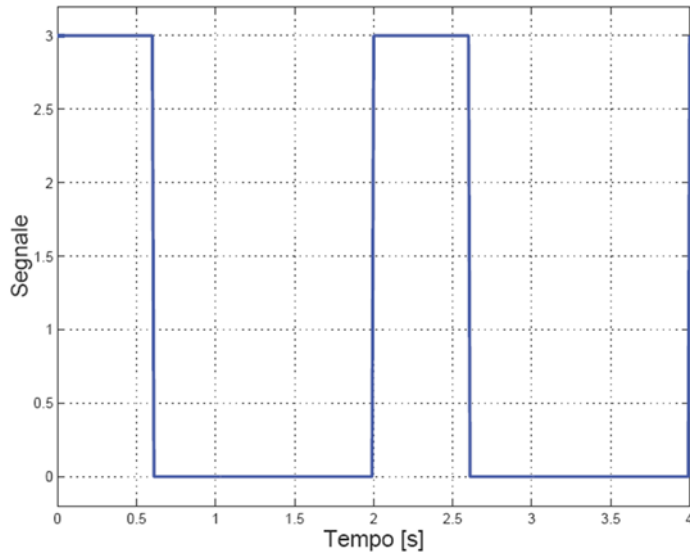
$$c_k = \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_0 = c_0 \quad \textit{componente continua}$$

- 1^a armonica** (fondamentale): $r_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- k^a armonica**: $r_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$
- $r_k = |c_k|$ peso del modulo della k^a armonica
- $\varphi_k = \arg(c_k)$ sfasamento della k^a armonica

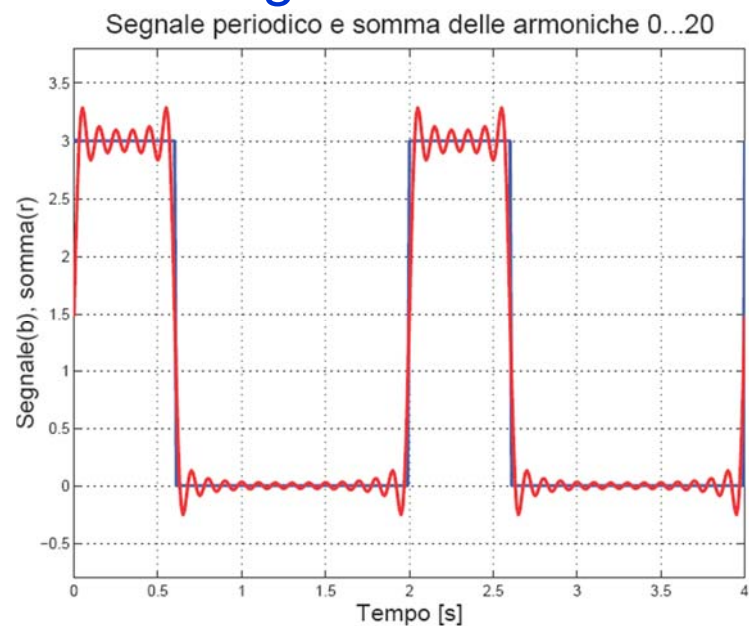
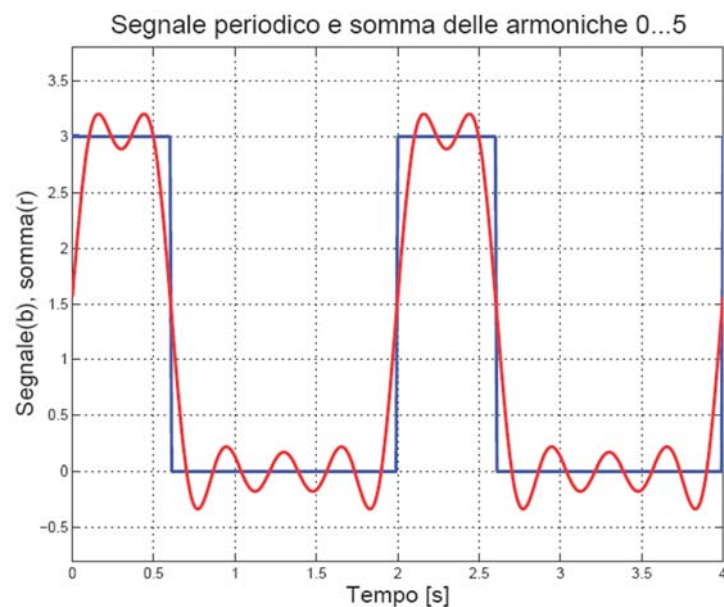
Sviluppo in serie di Fourier

- Esempio di segnale periodico: impulso rettangolare periodico



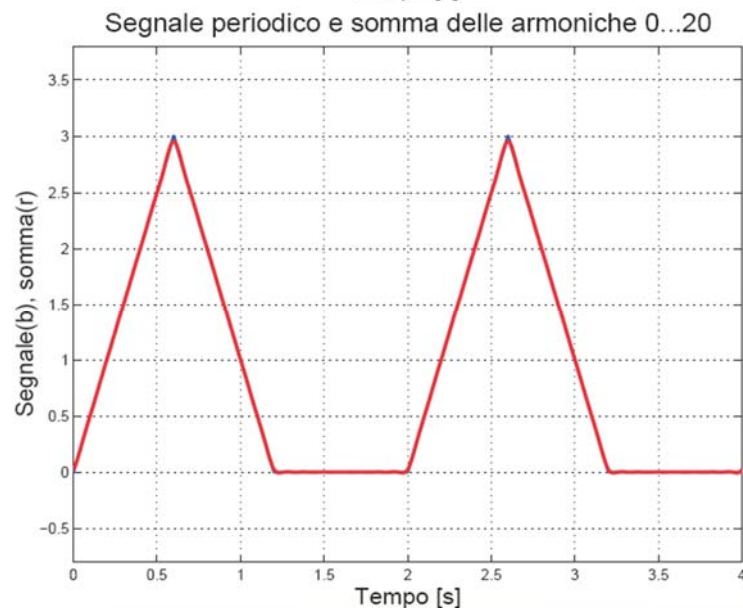
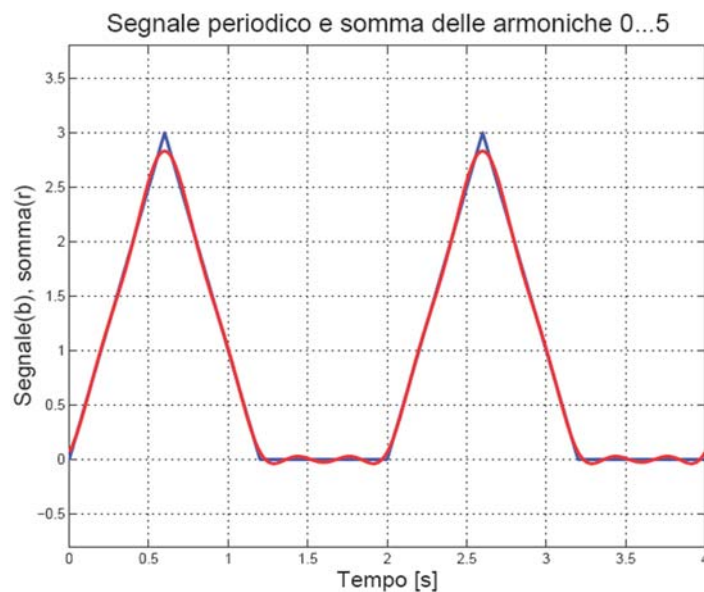
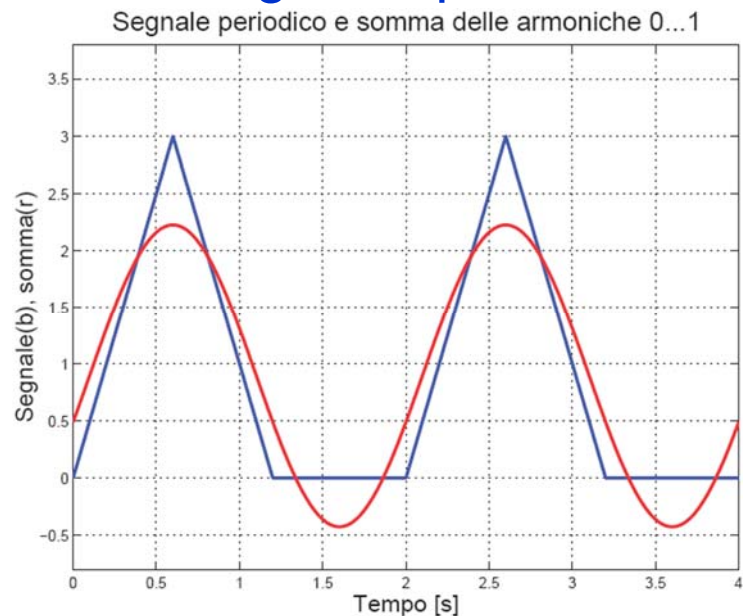
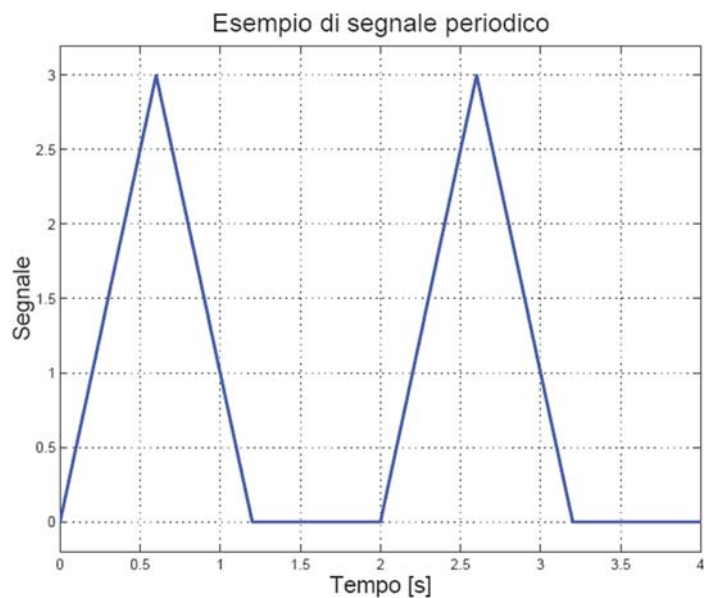
Sviluppo in serie di Fourier

- Esempio di segnale periodico: **impulso rettangolare**



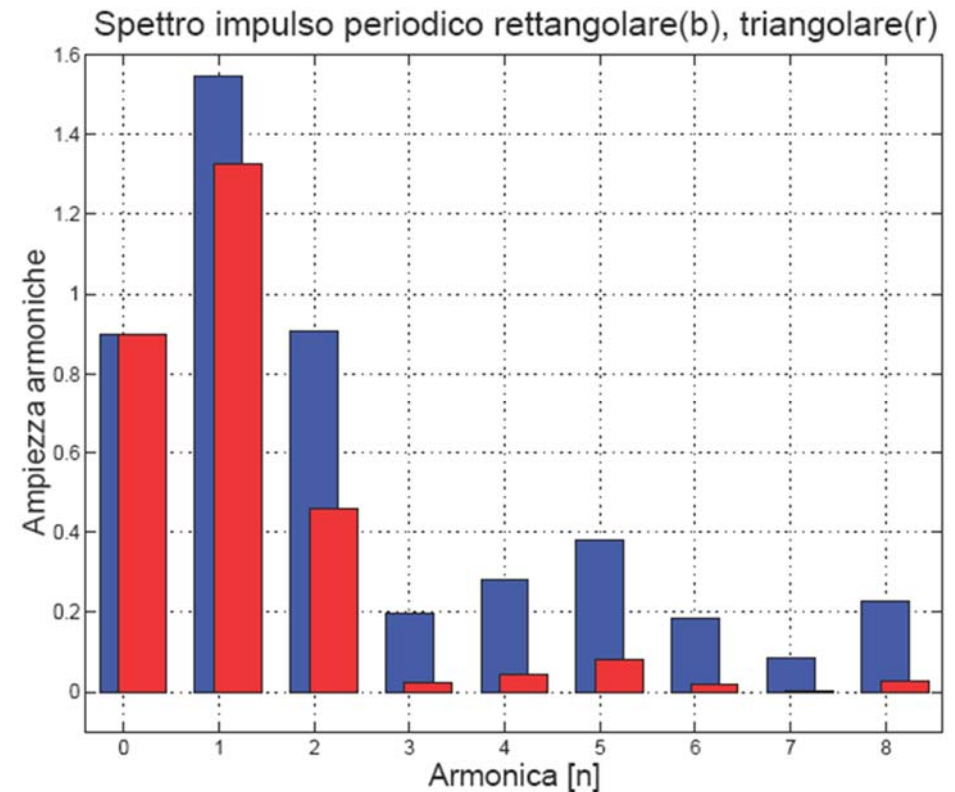
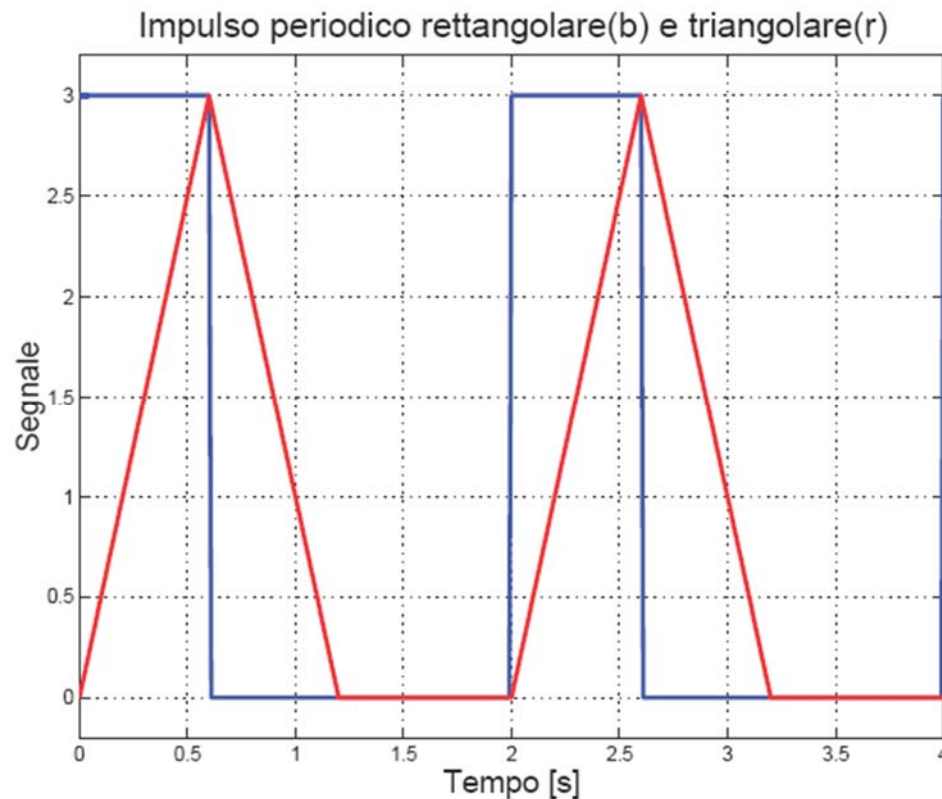
Sviluppo in serie di Fourier

- Esempio di segnale periodico: **impulso triangolare periodico**



Sviluppo in serie di Fourier

- Tipicamente le prime armoniche di un segnale periodico presentano un'ampiezza r_k più elevata rispetto alle armoniche con frequenza più elevata
- Le armoniche ad alta frequenza di segnali che variano rapidamente hanno tipicamente un'ampiezza maggiore rispetto alle corrispondenti armoniche dei segnali che variano lentamente



Trasformata di Fourier

- Anche le funzioni $f(t)$ non periodiche si possono scomporre nella “somma” di funzioni sinusoidali. In questo caso si parla di **trasformata di Fourier**

$$F(j\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- Dalla definizione segue che

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

dove $F(s)$ è la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$

- La funzione $F(j\omega)$ si dice spettro di $f(t)$. Il modulo di $F(j\omega)$ è detto **spettro di ampiezza**. L'argomento di $F(j\omega)$ è detto **spettro di fase**
- La funzione $f(t)$ si ricava dallo spettro $F(j\omega)$ tramite l'antitrasformata di Fourier:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Trasformata di Fourier

- L'antitrasformata di Fourier è l'analogo per le funzioni non periodiche della serie di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Per le funzioni $f(t)$ **reali** è sufficiente conoscere $F(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ in quanto vale la relazione

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

dove $\varphi(\omega) = \arg F(j\omega)$

Trasformata di Fourier

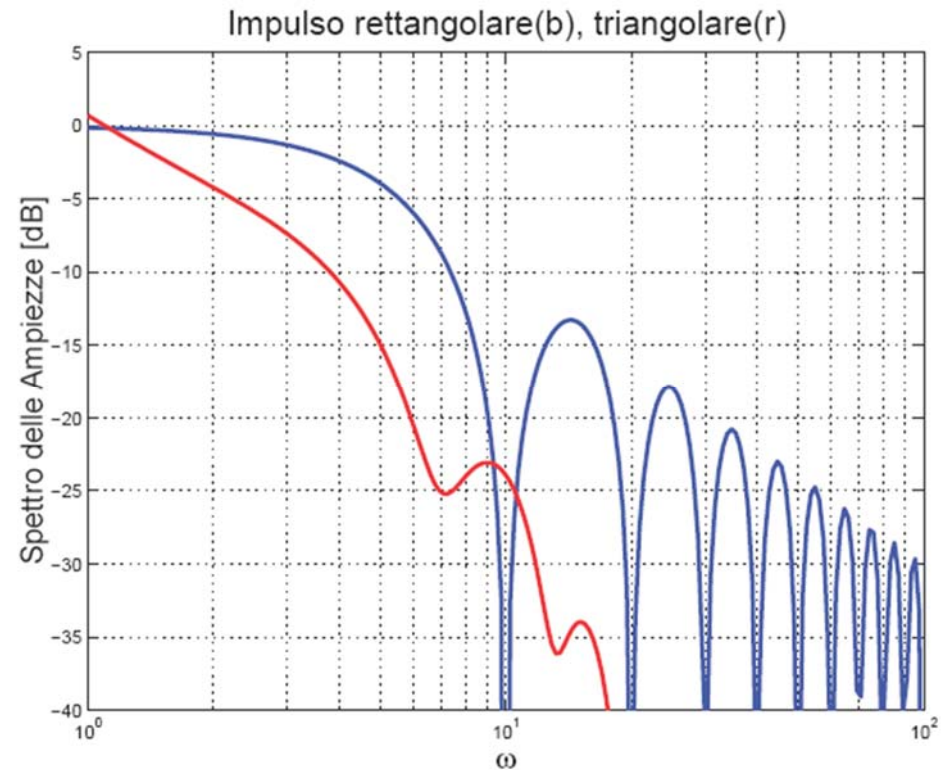
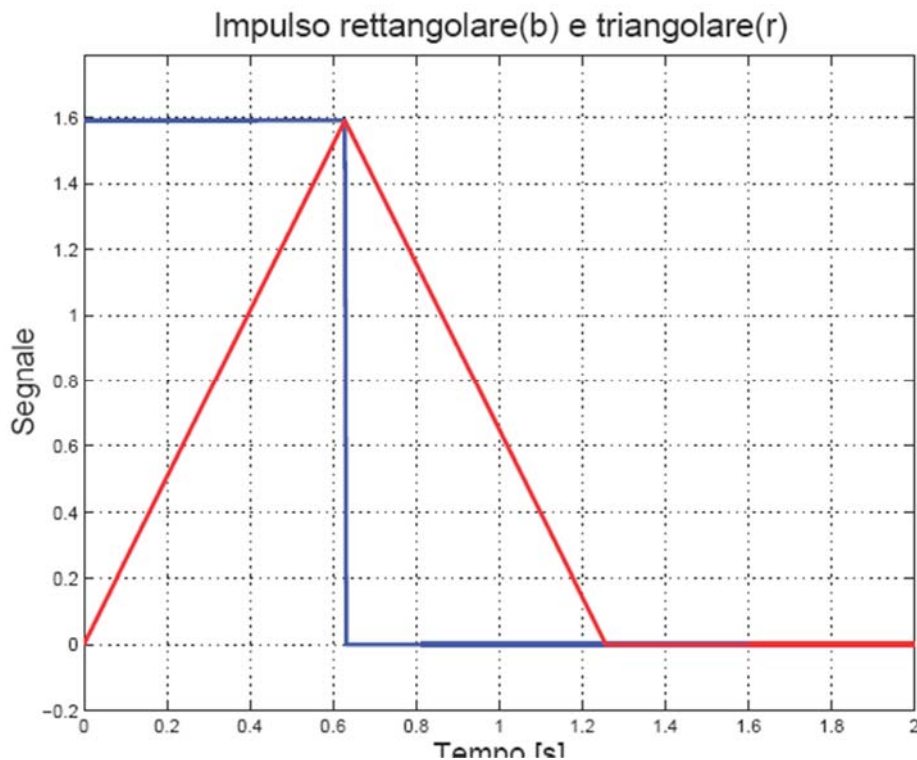
- Lo spettro di $F(j\omega)$ si rappresenta solitamente con due grafici:
 - **Il diagramma delle ampiezze** rappresenta il modulo $|F(j\omega)|$ espresso solitamente in dB in funzione di $\log_{10}\omega$.

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)|$$

- **Il diagramma delle fasi** rappresenta $\arg F(j\omega)$ (in radianti o in gradi) in funzione di $\log_{10}\omega$.

Trasformata di Fourier

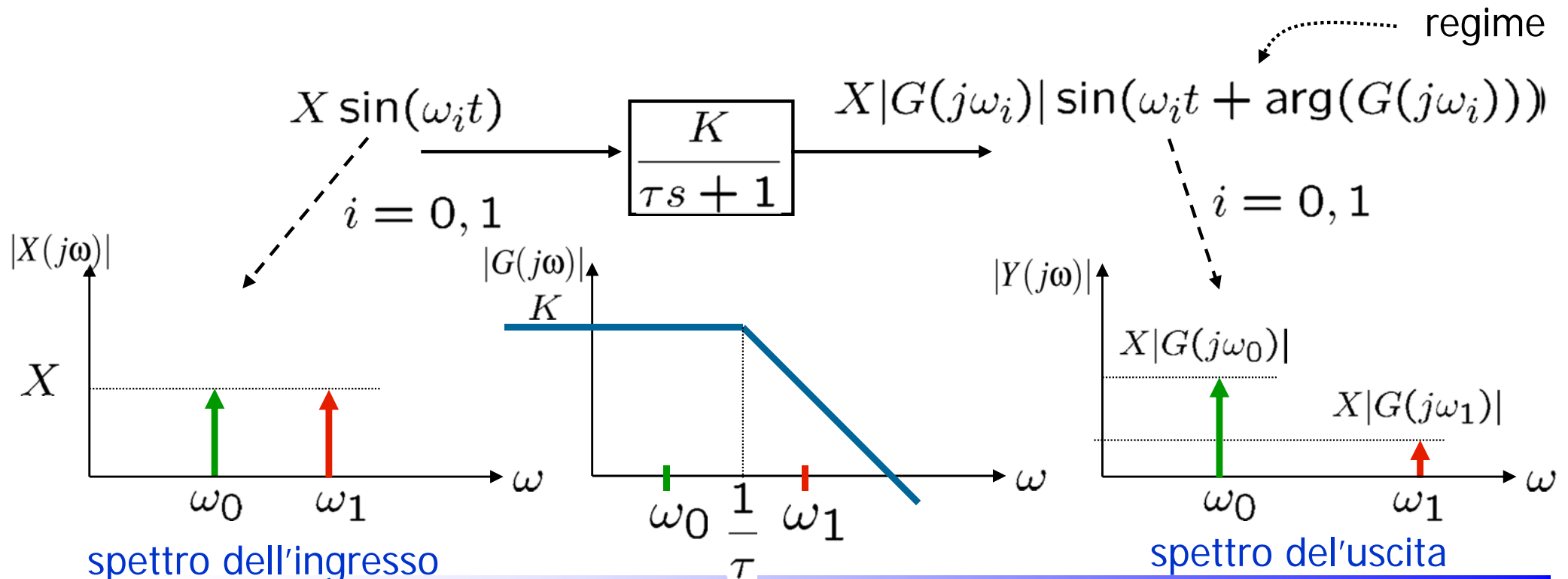
- Mentre per i segnali periodici si ha uno spettro discreto, per i segnali non periodici lo spettro è continuo
- Valgono considerazioni analoghe a quelle dei segnali periodici. Tipicamente segnali che variano rapidamente hanno spettri di ampiezza significativi anche alle alte frequenze



Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari

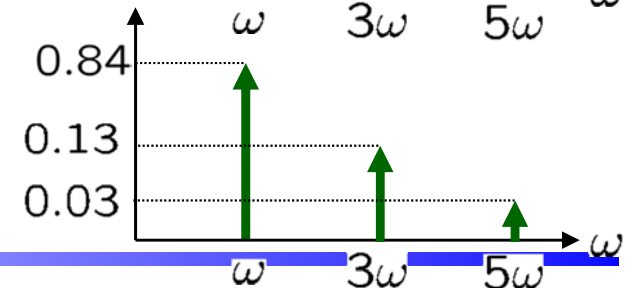
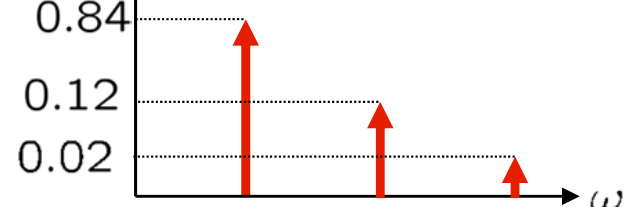
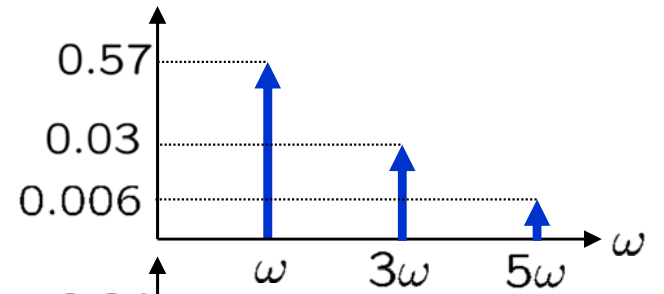
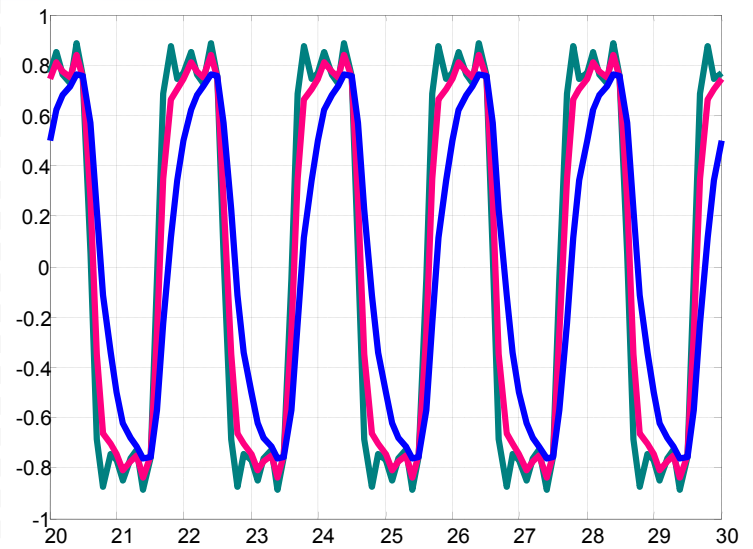
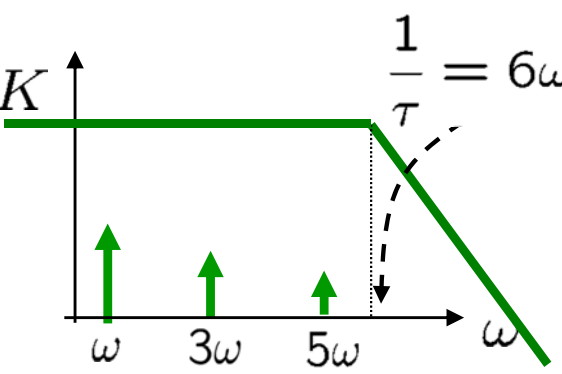
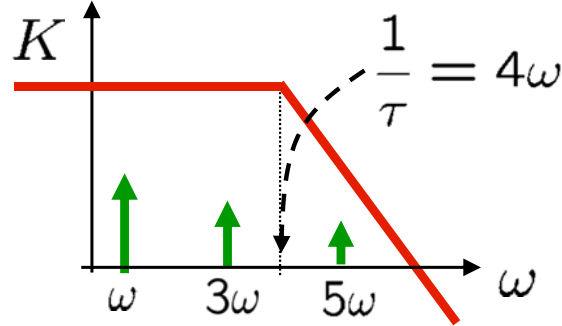
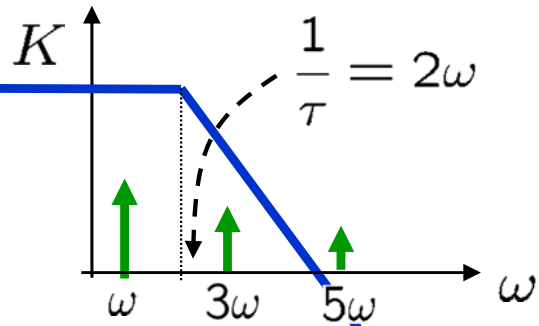
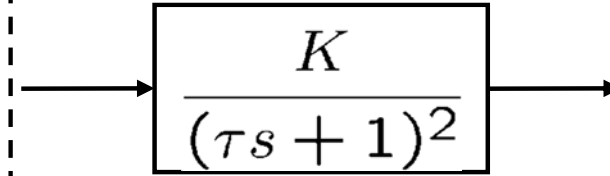
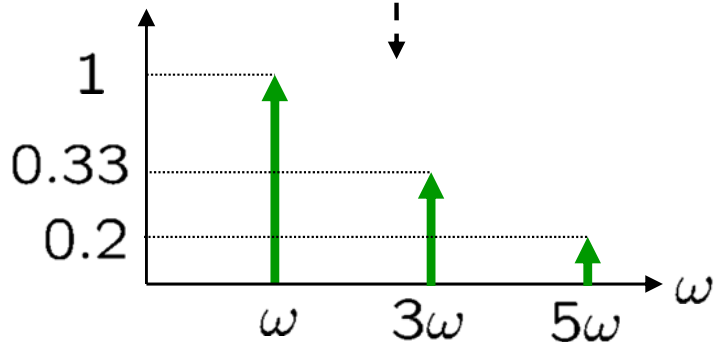
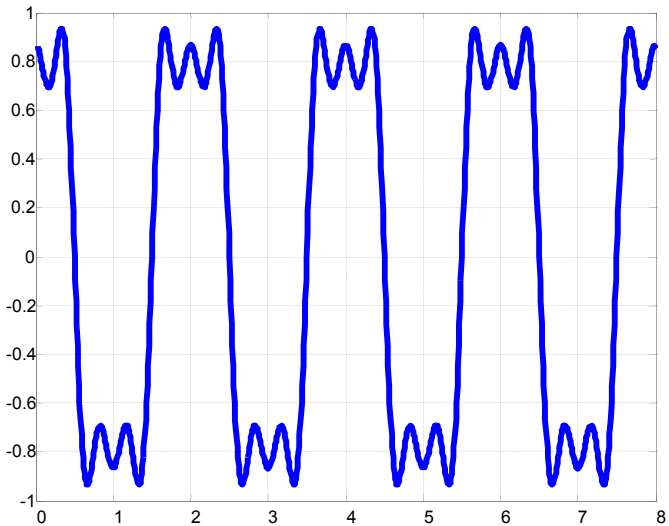
Dalla definizione di funzione di risposta armonica, l'uscita a regime di un sistema lineare asintoticamente stabile con funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, forzato da un ingresso con spettro frequenziale $X(j\omega)$, è un segnale temporale il cui spettro $Y(j\omega)$:

- ha le stesse componenti frequenziali di quello in ingresso (non vengono aggiunte frequenze non presenti nello spettro di ingresso);
- ha un andamento che è quello dello spettro di ingresso “modulato” dall'andamento della funzione di risposta armonica.



Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari

$$f(t) = \cos(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t)$$



Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari

- In realtà la proprietà dello spettro del segnale di uscita di essere quello del segnale di ingresso “modulato” dalla funzione di risposta armonica non vale solo per il segnale a regime ma bensì per l’andamento completo.
- Applicando in ingresso al sistema lineare un ingresso $x(t)$ con spettro $X(j\omega)$, lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ si ottiene come:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)X(j\omega)$$

- Gli spettri di ampiezza e fase risultano perciò

$$\begin{aligned} |Y(j\omega)|_{dB} &= |G(j\omega)|_{dB} + |X(j\omega)|_{dB} \\ \arg Y(j\omega) &= \arg G(j\omega) + \arg X(j\omega) \end{aligned}$$

Quindi lo spettro $Y(j\omega)$ è una versione, alterata dalla funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, dello spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso.

Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari

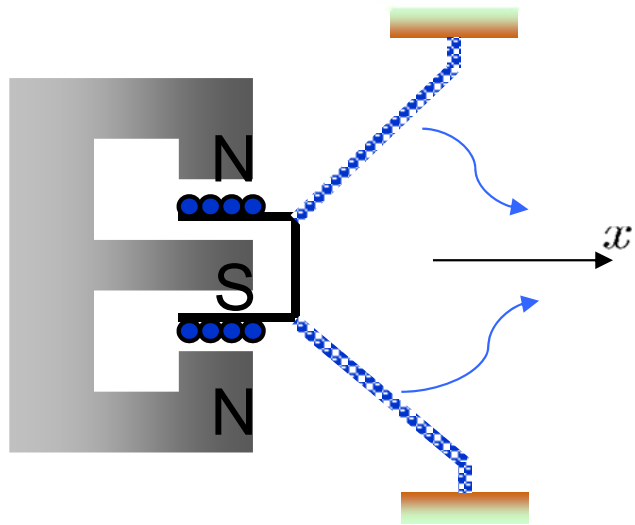
- Differenze nello spettro equivalgono a differenze nella risposta temporale.
- Il sistema lineare riuscirà a inseguire esattamente l'andamento del segnale di ingresso, ovvero $y(t) = K x(t)$ ($K > 0$), sse:

$$|G(j\omega)| = K \quad \text{e} \quad \arg G(j\omega) = 0$$

- Le differenze tra la risposta $y(t)$ e il segnale di ingresso $x(t)$ sono tanto maggiori quanto più $|G(j\omega)| \neq K$ e $\arg G(j\omega) \neq 0$
- La banda passante è quell'intervallo di pulsazioni ω per il quale vale la relazione

$$|G(j\omega)| \approx K \quad \text{e} \quad \arg G(j\omega) \approx 0$$

Esempio: Altoparlante magnetico



Funzione di trasferimento del sistema (dall'ingresso v_f , all'uscita \dot{x}):

$$G(s) = \frac{b_1 s}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$b_1 = k, a_0 = hR, a_1 = Lh + \beta R + k^2$$

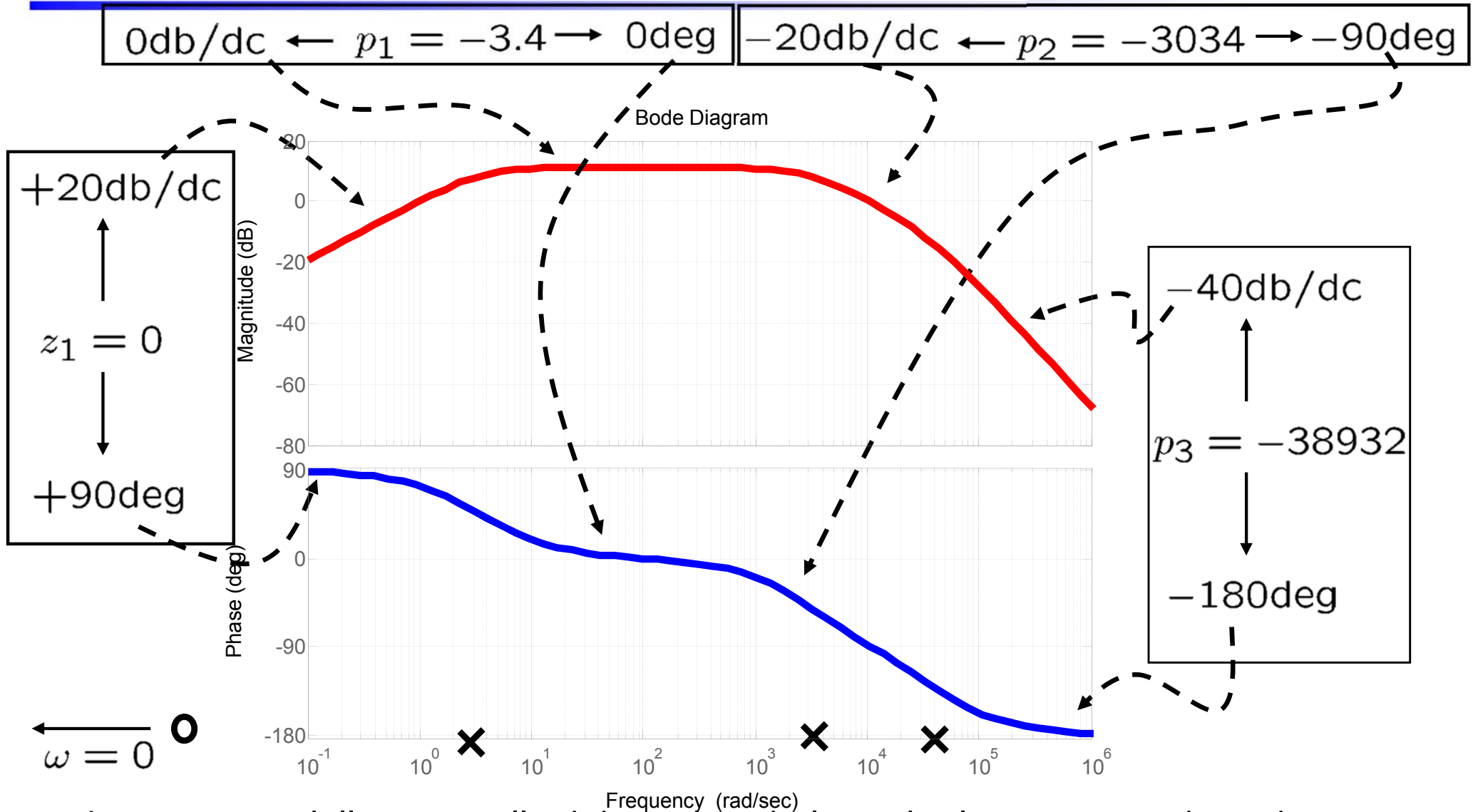
$$a_2 = L\beta + MR, a_3 = LM$$

- $L = 10^{-4}\text{H}$ Induttanza bobina
- $R = 4\Omega$ Resistenza bobina
- $k = 6.28\text{N/A}$ Costante di forza bobina
- $M = 10^{-2}\text{Kg}$ Massa del cono
- $h = 103\text{N/m}$ Costante elastica sospensione
- $\beta = 20\text{Ns/m}$ Coefficiente attrito cono nell'aria
- $G = 69.5\text{Ws/m}$ Costante velocità cono/potenza acustica

Mappa poli/zeri:

- $z_1 = 0$ ← Zero nell'origine
- $p_1 = -3.4$
- $p_2 = -3064$ } Poli meccanici
- $p_3 = -38932$ } Polo elettrico

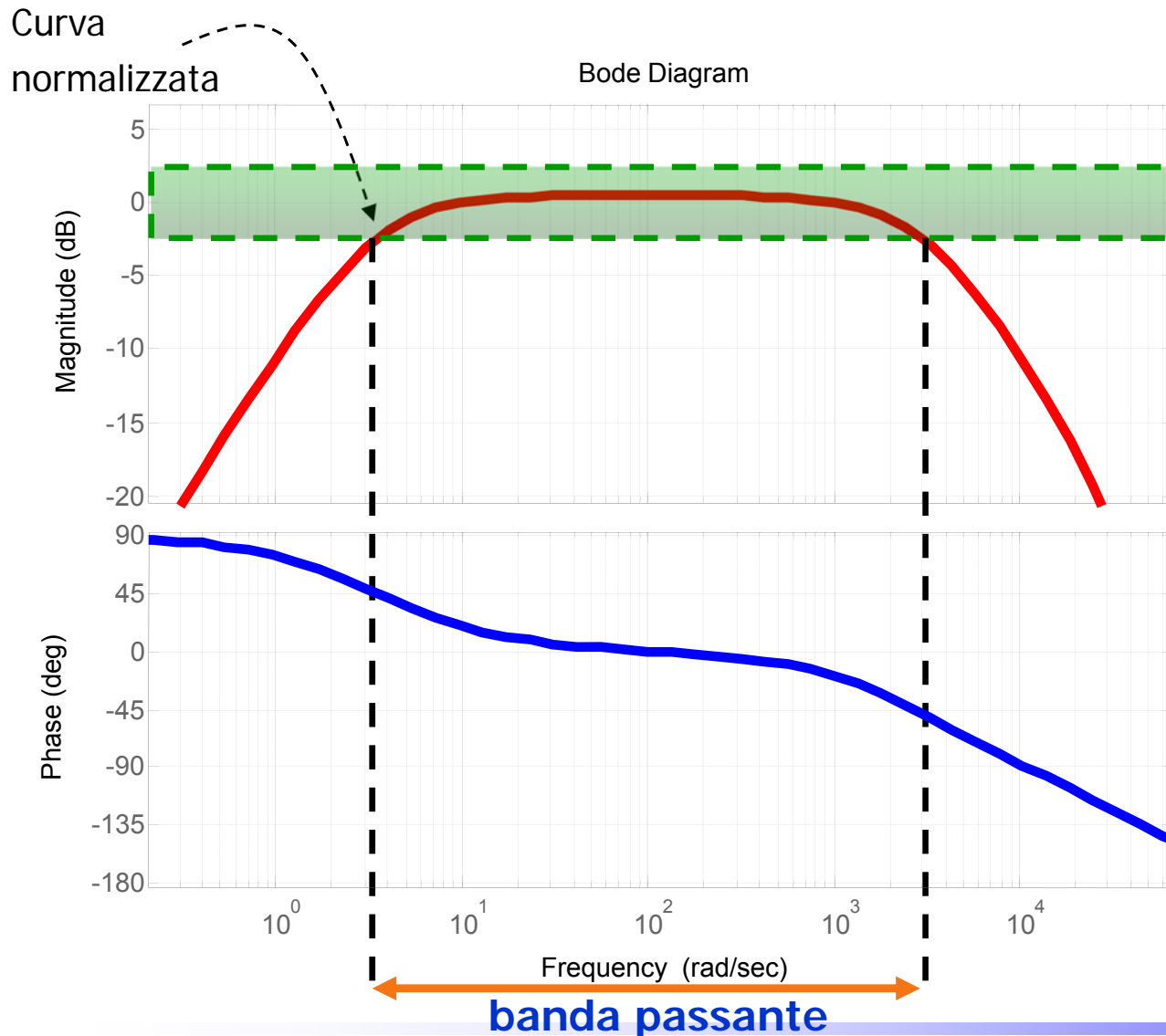
Esempio: Altoparlante magnetico



- La presenza dello zero nell'origine mette in luce che le componenti continue non vengono "trasferite" (senso fisico)
- Le frequenze elevate non vengono trasferite (senso fisico)

Esempio: Altoparlante magnetico

Il sistema esaminato risulta essere un "passa banda", ovvero solo le armoniche comprese in un certo intervallo frequenziale vengono trasferite in uscita senza attenuazione in ampiezza (a meno di una costante e con sfasamenti trascurabili)



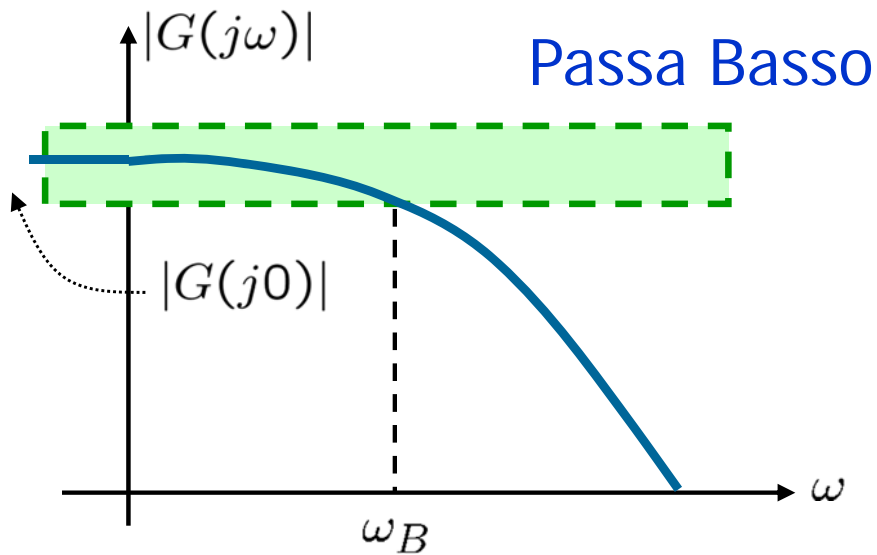
Banda passante:

intervallo di frequenze in cui il diagramma di Bode delle ampiezze è compreso tra $[-3, 3]$ dB (in generale compreso in una fascia ampia 6 dB centrata sul valore massimo)

Classificazione sistemi

Proprietà filtranti dei sistemi

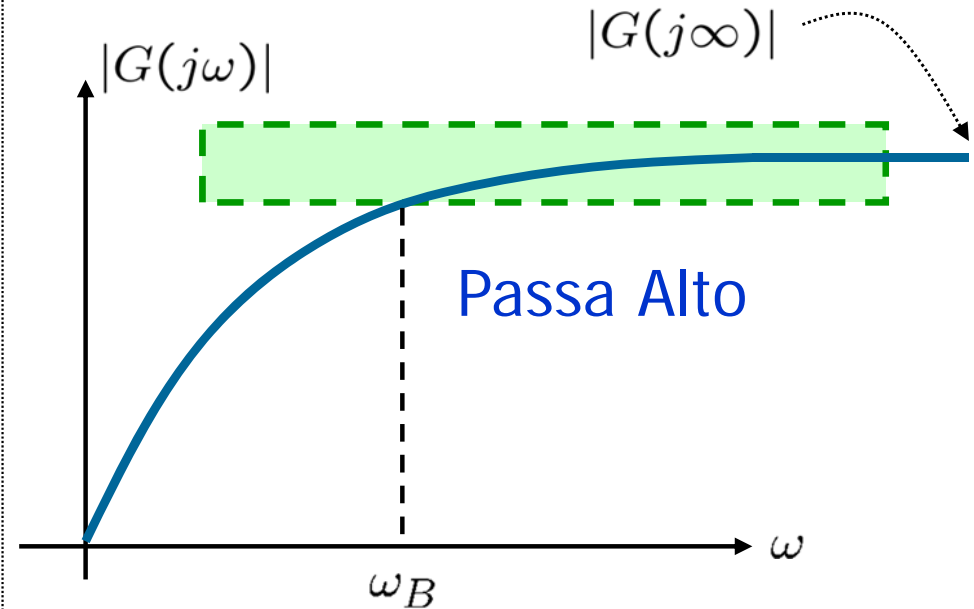
Ogni sistema dinamico agisce sullo spettro delle frequenze in ingresso in modo selettivo. Molti sistemi di interesse fisico possono essere classificati in base la tipo di azione filtrante



$$\underbrace{-3\text{dB}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \underbrace{3\text{dB}}_{\sqrt{2}} \quad \forall \omega \leq \omega_B$$

$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega > \omega_B$$

$[0, \omega_B] \longrightarrow$ Banda passante



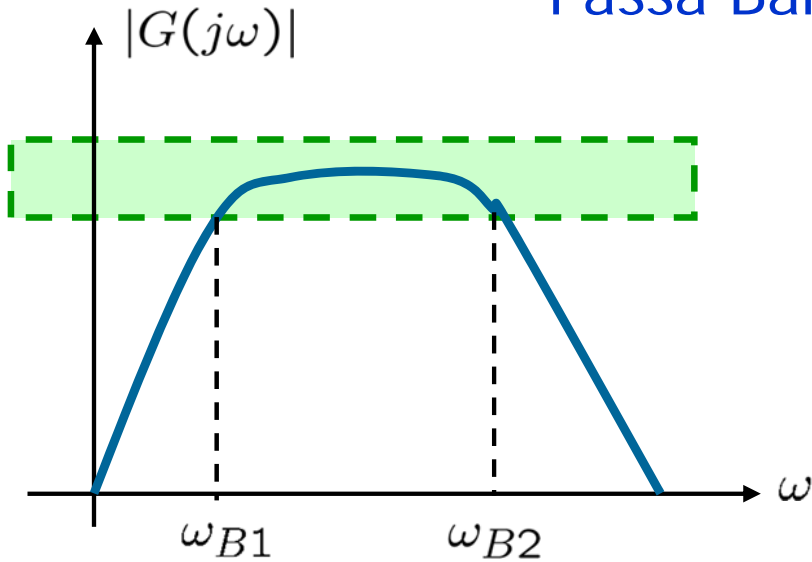
$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega < \omega_B$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2} \quad \forall \omega \geq \omega_B$$

$[\omega_B, \infty] \longrightarrow$ Banda passante

Proprietà filtranti dei sistemi

Passa Banda

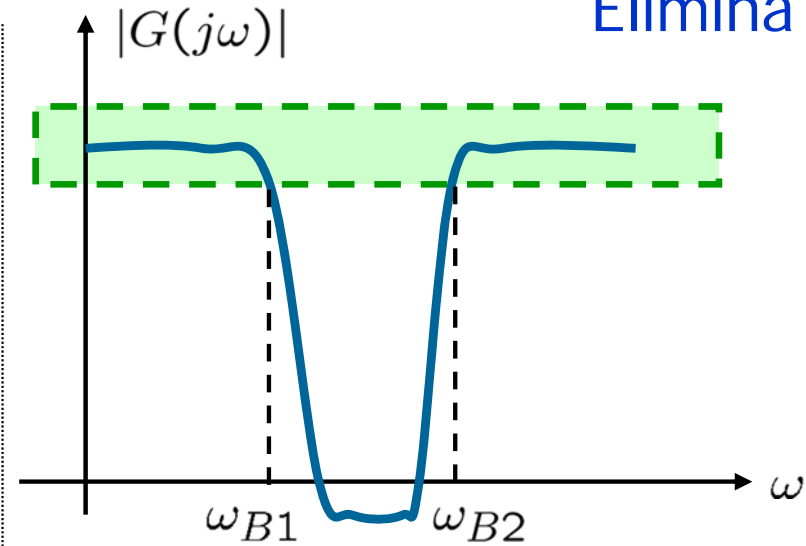


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2} \quad \forall \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}]$$

$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega \notin [\omega_{B1}, \omega_{B2}]$$

$[\omega_{B1}, \omega_{B2}] \longrightarrow$ Banda passante

Elimina Banda



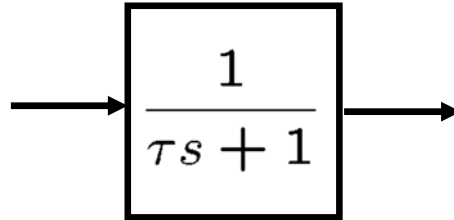
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2} \quad \forall \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$$

$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}]$$

$[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty] \longrightarrow$ Banda passante

Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO

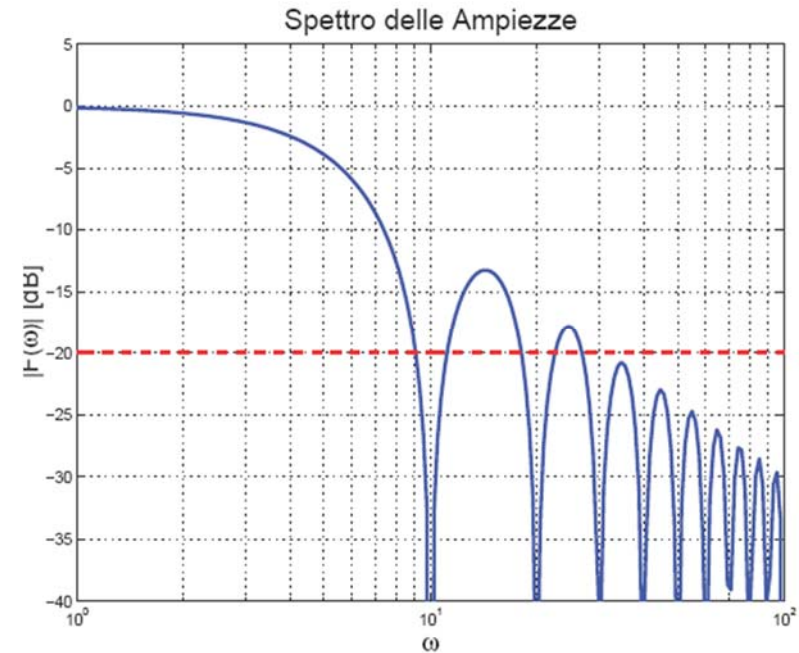
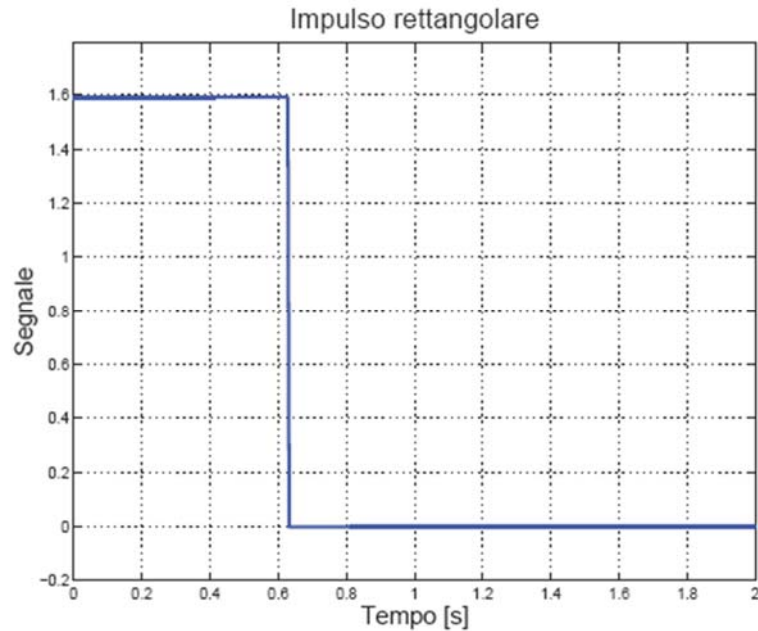
- Si considera un sistema del primo ordine con guadagno statico unitario



- Si tratta in un sistema passa basso con banda passante $0 \leq \omega \leq \omega_B$ in cui $\omega_B = 1/\tau$
- Si applica in ingresso a $G(s)$ un impulso rettangolare $x(t)$ di durata t_0 e ampiezza $1/t_0$ (area unitaria), il cui spettro risulta

$$X(j\omega) = \frac{1}{t_0 j\omega} (1 - e^{-j\omega t_0})$$

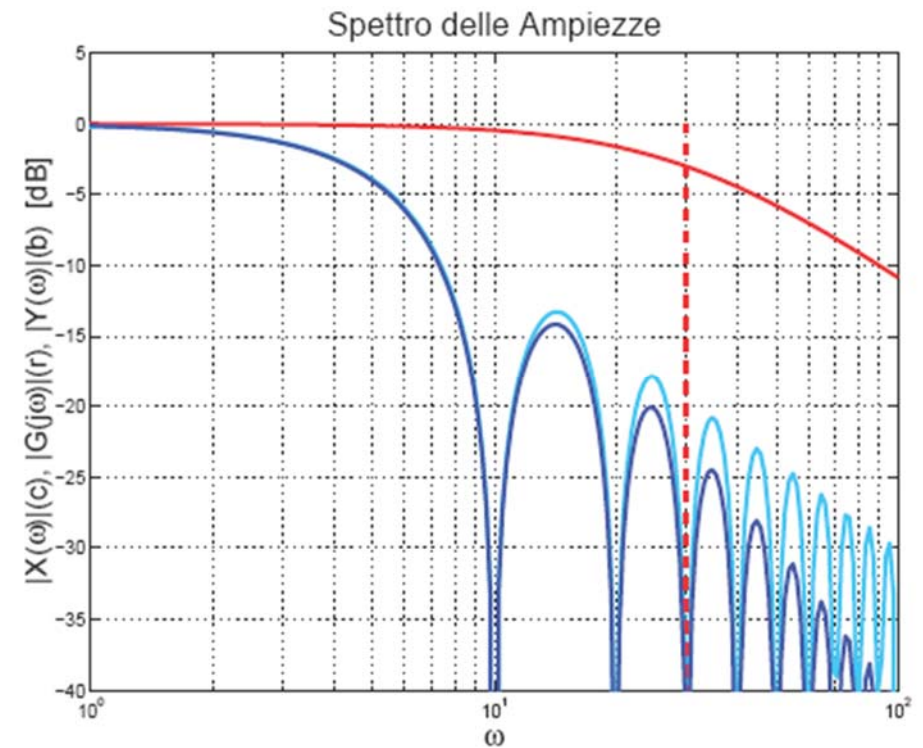
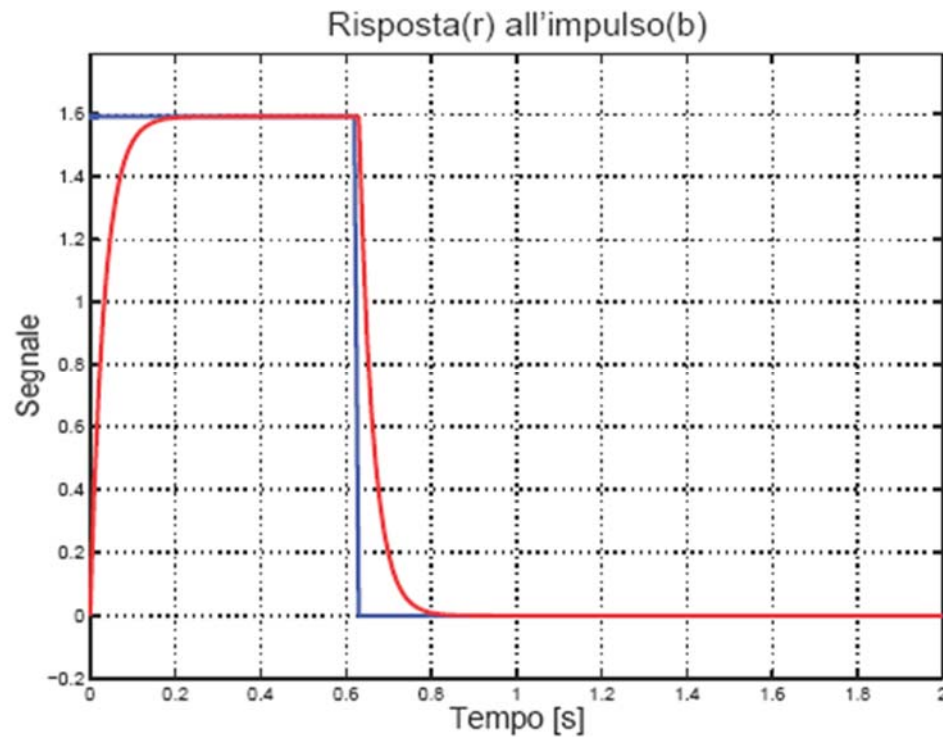
Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO



- Lo spettro si annulla per $\omega = n \omega_0$ con $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$
- Per $\omega > 3\omega_0$ lo spettro delle ampiezze del segnale è inferiore a 1/10 rispetto allo spettro a basse pulsazioni.

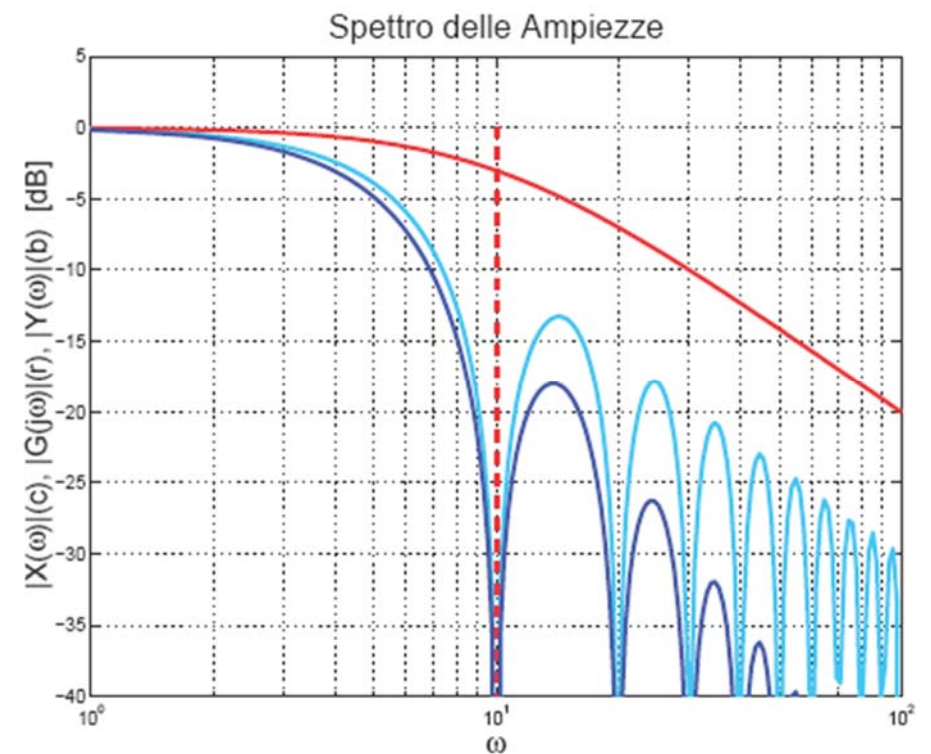
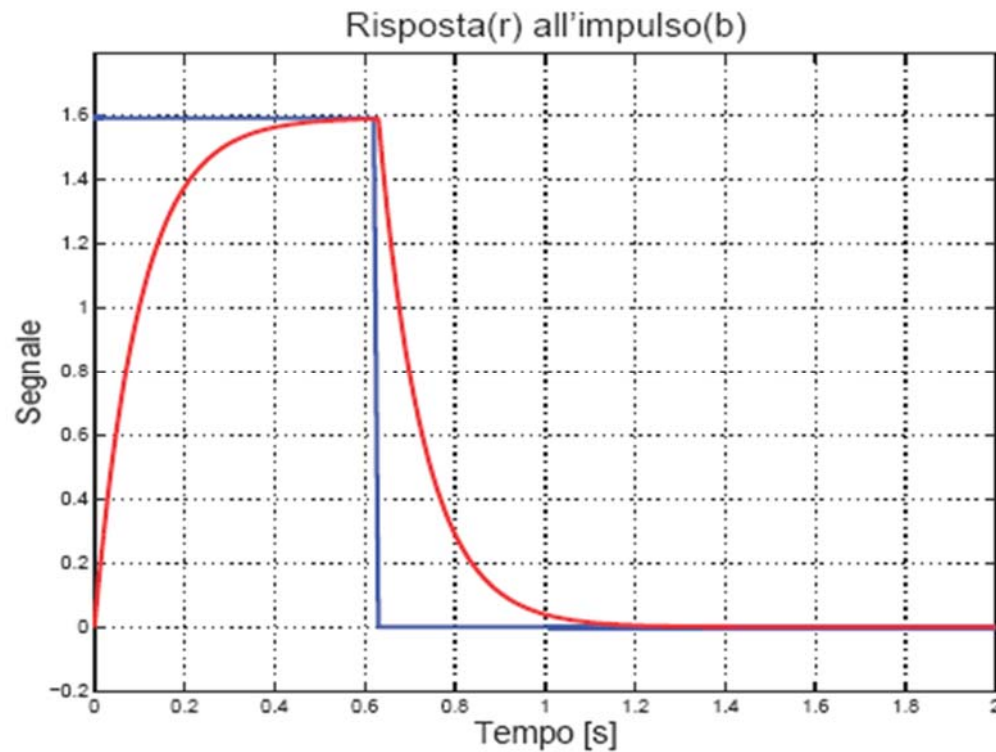
Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO

- Se $\omega_B = 3\omega_0$



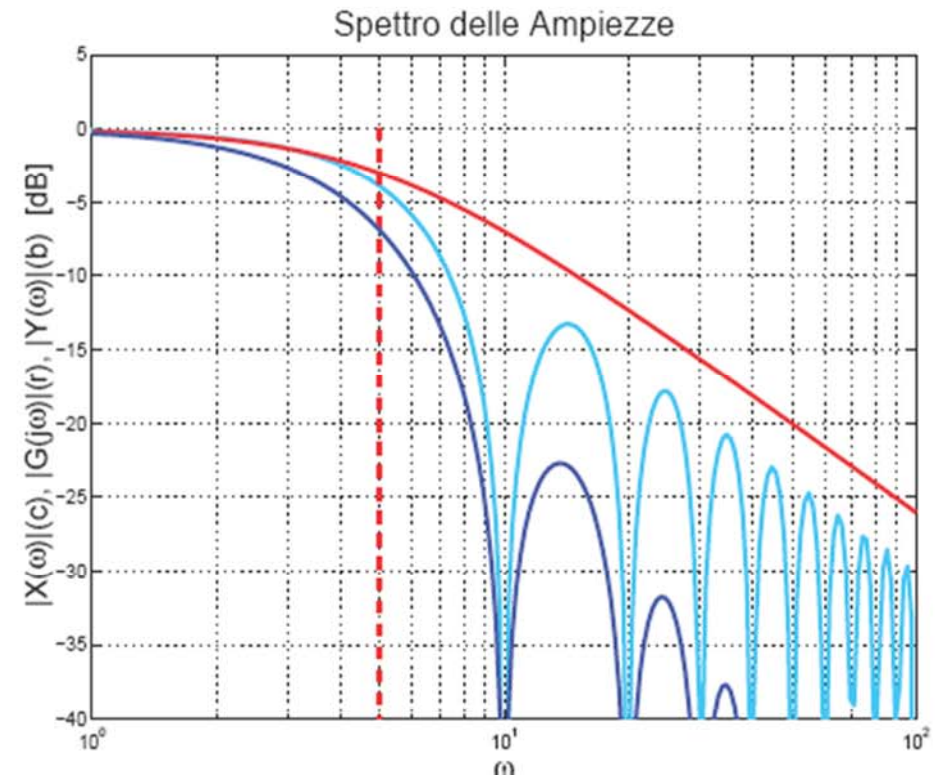
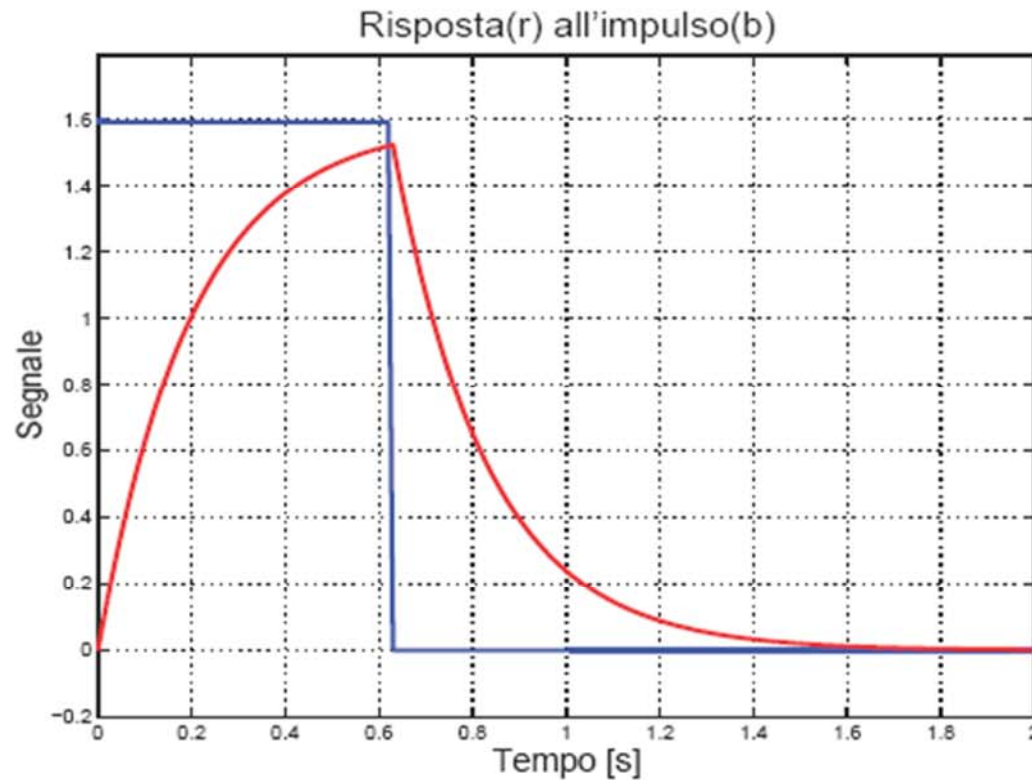
Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO

- Se $\omega_B = \omega_0$



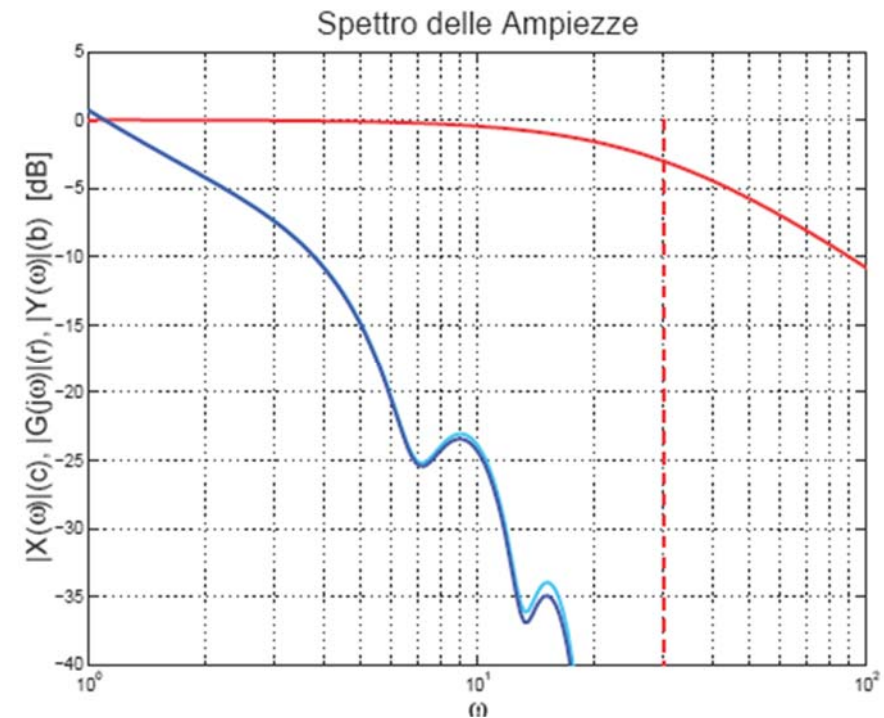
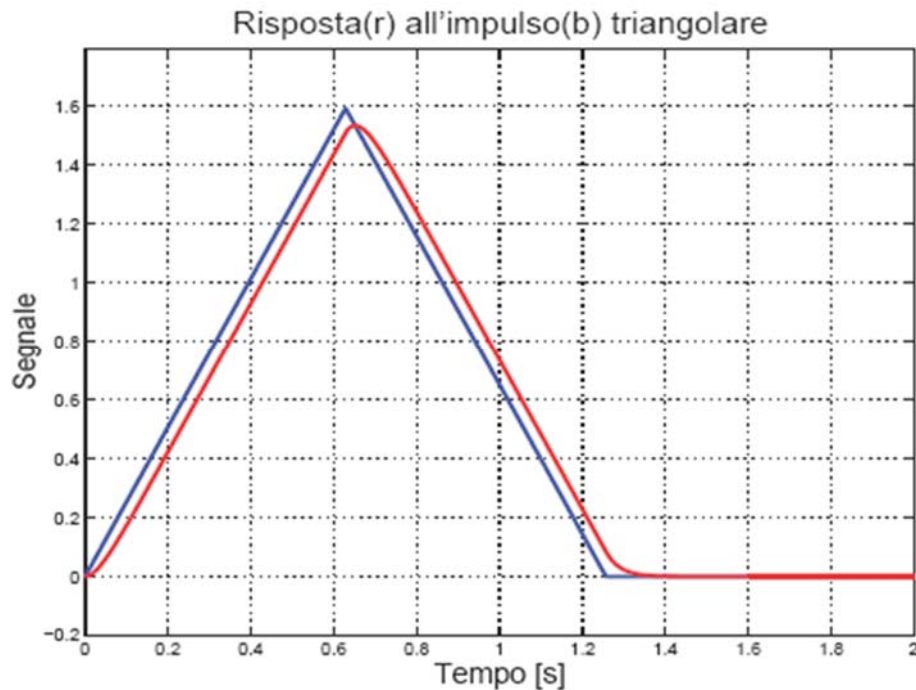
Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO

- Se $\omega_B = \omega_0/2$



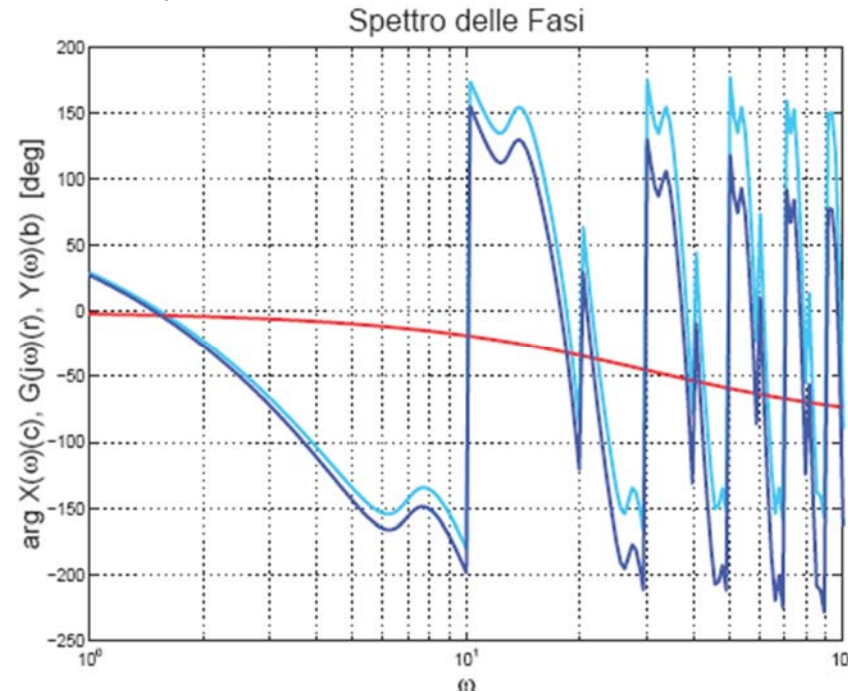
Spettri di segnali filtrati da sistemi lineari-ESEMPIO

- Si considera in ingresso al sistema un impulso triangolare $x(t)$ di durata $2t_0$ e ampiezza $1/t_0$ (area unitaria)
- Se $\omega_B = 3\omega_0$



- Lo spettro delle ampiezze di $Y(j\omega)$ è sostanzialmente identico a quello di $X(j\omega)$. A cosa è dovuto allora il ritardo di $y(t)$ rispetto a $x(t)$?

- Lo spettro delle fasi di $y(t)$ risulta



- Lo spettro delle fasi di $Y(j\omega)$ e quello di $X(j\omega)$, differiscono tra loro anche anche per pulsazioni relativamente piccole. **In particolare lo spettro di $Y(j\omega)$ presenta angoli minori rispetto a quello di $X(j\omega)$ (sfasamento in ritardo)**
- Qualitativamente un ritardo di fase introdotto da un sistema lineare induce un ritardo tra segnale di ingresso e segnale di uscita

Banda passante e velocità di risposta

- La larghezza di banda ω_B di un sistema, oltre a definire le capacità filtranti del sistema stesso, fornisce anche un'indicazione “qualitativa” della sua velocità
- La larghezza di banda può essere messa in relazione con i tempi di assestamento.
- Per un sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_B}{s + \omega_B} \quad T_a = \frac{3}{\omega_B}$$

- Per un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_B \approx \omega_n \quad T_a = \frac{3}{\delta\omega_B}$$

solo se
 $M_R \leq 3\text{db} \rightarrow \delta \geq 0.49$

CONTROLLI AUTOMATICI

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

**Banda passante e sviluppo in serie di
Fourier
FINE**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>